Chapitre II

Le potentiel électrique

1 Notion d'énergie potentielle électrique

La force électrique coulombienne est une force conservative, c'est-à-dire, il existe une fonction U(x, y, z) appelée énergie potentielle électrostatique, dont dérive cette force.

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U$$

Considérons une charge électrique ponctuelle q placée à une distance r d'une autre charge ponctuelle Q. La charge q va subir de la part de Q, une force électrostatique :

$$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\vec{u}$$

Lorsqu'on déplace la charge q dans le champ électrique extérieur $\vec{E}$ créé par Q, d'un déplacement infinitésimal$\vec{dl}$, le travail élémentaire dW effectué par la force électrique $\vec{F}_e$ est tel que : $$dW = -dU = \vec{F}_e.\vec{dl}$$

Remarques :

1. Le travail élémentaire accompli par une force conservative est égal à la diminution de son énergie potentielle (-dU), d'où le signe moins. Comme $\vec{F}_e = q\vec{E}$, alors on peut écrire : $dU = -q\vec{E}.\vec{dl}$.

   Pour un déplacement fini de la charge (q) entre deux points A et B, la variation de l'énergie potentielle ΔU de la charge q est donnée par :

   $$\Delta U = U_B - U_A = -q\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}$$

   Cette intégrale est dite curviligne, elle ne dépend pas de la trajectoire suivie entre A et B, car la force électrique $\vec{F}_e = q\vec{E}$ est conservative.

   Notons que $\Delta U = -W_{AB}(\vec{F})$ où $W_{AB}(\vec{F})$ est le travail de la force $\vec{F}_e$ entre ces memes points.
2. Si la charge Q n'est pas ponctuelle, alors, on peut la considérer comme une distribution de charges ponctuelles, et par suite le champ électrique résultant est la somme des champs individuels de chaque charge ponctuelle : $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$. Ainsi, la force électrique subit par q de la part de Q reste une force conservative et la relation :

$\Delta \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U_B} - \boldsymbol{U_A} = -\boldsymbol{q}\int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \vec{\boldsymbol{E}}.\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ reste valable quelque soit l'origine du champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$.

2 Le potentielle électrique

2.1 Notion de potentiel électrique

De la relation : $\Delta \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U_B} - \boldsymbol{U_A} = -\boldsymbol{q}\int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \vec{\boldsymbol{E}}.\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{l}}$, on peut déduire que :

$$\frac{\Delta \boldsymbol{U}}{\boldsymbol{q}} = \frac{\boldsymbol{U_B} - \boldsymbol{U_A}}{\boldsymbol{q}} = -\int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \vec{\boldsymbol{E}}.\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

Par analogie, on peut conclure qu'il existe une fonction scalaire : $\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{q}}$ dite potentiel électrique, tel que le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ en un point dérive du potentiel : $\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}\boldsymbol{V}}$

Remarques :

1. Le signe moins est une convention liée à celle adoptée pour l'énergie potentielle.
2. La conséquence de cette définition du potentiel est qu'en un point M et pour un déplacement infinitésimal quelconque dl : $\boldsymbol{dV} = -\vec{\boldsymbol{E}}.\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{l}}$. comme dV est une différentielle totale exacte, alors :

$$\boldsymbol{dV} = \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial x}}\boldsymbol{dx} + \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial y}}\boldsymbol{dy} + \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial z}}\boldsymbol{dz}$$

Ainsi :

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial x}}\vec{\boldsymbol{\imath}} - \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial y}}\vec{\boldsymbol{\jmath}} - \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial z}}\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\boldsymbol{E_x} = -\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial x}} ; \boldsymbol{E_y} = -\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial y}} \text{ et } \boldsymbol{E_z} = -\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial z}}$$

D'où l'expression suivante pour le gradient en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}\boldsymbol{V}} = \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial x}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial y}}\vec{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial z}}\vec{\boldsymbol{k}}$$

En faisant de même en coordonnées cylindriques et sphériques on trouve respectivement :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}\boldsymbol{V}} = \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial r}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial \theta}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial z}}\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{grad}\boldsymbol{V}} = \frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial r}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial \theta}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}\sin\boldsymbol{\theta}}\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial \varphi}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\varphi}}$$

En coordonnées cylindriques : $\boldsymbol{E_r} = -\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial r}}$; $\boldsymbol{E_\theta} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial \theta}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}$ et $\boldsymbol{E_z} = -\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial z}}$

En coordonnées sphériques : $\boldsymbol{E_r} = -\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial r}}$; $\boldsymbol{E_\theta} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial \theta}}$ et $\boldsymbol{E_\varphi} = -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}\sin\boldsymbol{\theta}}\frac{\boldsymbol{\partial V}}{\boldsymbol{\partial \varphi}}$

Si la distribution de charges est dotée d'une symétrie sphérique telle que la densité de charge dépend uniquement de la distance r, alors le champ électrique est radial, par conséquent :

$$\boldsymbol{E = E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{dr} \Rightarrow dV = -Edr}$$

3. La différence de potentiel V_B-V_A entre deux points, est définie comme la variation de l'énergie potentielle de la charge q divisé par la valeur de cette énergie :

$$\boldsymbol{V_B - V_A = \frac{\Delta U}{q} = -\int \vec{E}.d\vec{l}}$$

4. La variation de l'énergie potentielle d'une charge q entre deux points A et B est donnée par : $\Delta U=q(V_B-V_A)$, avec le travail de la force électrique $\vec{F}_e$ entre deux points est donné par :

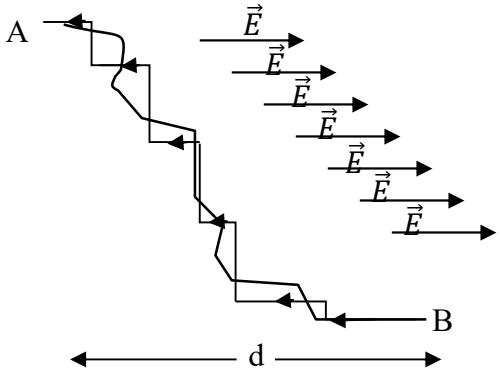
$$\boldsymbol{W_{AB}(\vec{F}_e) = q(V_B - V_A)}$$

La différence de potentiel V_B-V_A est donc égal à la quantité de travail par unité de charge que doit accomplir un agent extérieur pour déplacer une charge q de A à B sans modifier l'énergie cinétique

5. L'unité de V_B-V_A est le volt de symbole V : 1V=1J/C, ce qui faite que l'unité du champ électrique qui est N/C est aussi V/m.
6. Nous pouvons conclure à partir de cette relation aussi que le champ électrique $\vec{E}$ se dirige dans le sens des potentiels décroissants.

2.2 Cas particulier : champ uniforme

Dans le cas où le champ électrique $\vec{E}$ est uniforme, on a la circulation du vecteur champ électrique entre deux points quelconques A et B :



$$\boldsymbol{V_B - V_A = -\int_{AB} \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{AB} Edl\cos\alpha}$$

α étant l'angle entre $\vec{E}$ et le vecteur déplacement $d\vec{l}$.

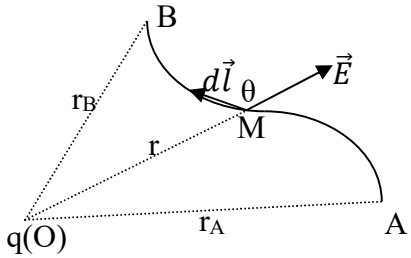
$$\boldsymbol{V_B - V_A = -E\,AB\,\cos\alpha = -E\,d}$$

Où d est le déplacement effectué par q dans la direction de $\vec{E}$.

Comme $\Delta U=q(V_B-V_A)$, alors $\Delta U = -q\,E\,d$.

2.3 Potentiel électrique d'une charge ponctuelle :

Soit une charge ponctuelle q qui produit un champ électrique radial. Calculons la différence de potentiel entre les points A et B. Le champ produit par la charge q dans une position r sur le trajet AB : $\boldsymbol{E = k\frac{q}{r^2}}$



Comme : $\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{V}$ alors $\boldsymbol{dV = -\vec{E}.d\vec{l}}$.

En intégrant entre A et B, on obtient :

$$\int_{V_A}^{V_B} \boldsymbol{dV} = -\int \vec{\boldsymbol{E}}.\boldsymbol{d\vec{l}}$$

$$\boldsymbol{V_B - V_A} = -\int \vec{\boldsymbol{E}}.\boldsymbol{d\vec{l}}$$

$$\boldsymbol{V_B - V_A} = -\int \boldsymbol{Edl\cos\theta}$$

Où $\boldsymbol{dl\cos\theta}$ n'est autre que la projection de $\boldsymbol{d\vec{l}}$ dans la direction OM (OM = r), alors $\boldsymbol{dl\cos\theta = dr}$:

$$\boldsymbol{V_B - V_A} = -\int_A^B \boldsymbol{Edr}$$

$$\boldsymbol{V_B - V_A} = -\int_{r_A}^{r_B} \boldsymbol{k\frac{q}{r^2}dr}$$

$$\boldsymbol{V_B - V_A} = \boldsymbol{kq\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_a}\right]}$$

On remarque que la différence de potentiel V_B-V_A entre deux points quelconques A et B dépend uniquement de coordonnées radiales r_A et r_B.

Si l'on attribue un potentiel de référence nul à l'infini, c'est-à-dire V(∞)=0, le potentiel électrique V, attribuable à une charge ponctuelle q est à une distance r de cette charge :

$$\boldsymbol{V = k\frac{q}{r}, avec\ V(\infty) = 0}$$

<u>Remarque :</u>

Cette relation peut être déduite du fait que $\vec{\boldsymbol{E}} = -\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}\boldsymbol{V}$, et que E est une fonction de r seulement, alors : $\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{r}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} = -\frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dr}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}$

Ainsi dV=-Edr, et par suite : $\boldsymbol{V_B - V_A} = -\int_A^B \boldsymbol{Edr}$; ce qui donne :

$$\boldsymbol{V_B - V_A} = -\int_{r_A}^{r_B} \boldsymbol{k\frac{q}{r^2}dr} = \boldsymbol{kq\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_a}\right]}$$

2.4 Potentiel électrique à une distribution de charges :

Considérons un ensemble de charges ponctuelles q_i distribuées dans tout l'espace. Le potentiel créé par cette distribution en un point M de l'espace et en vertu du principe de superposition appliqué dans le cas de plusieurs charges ponctuelles, on obtient :

$$\boldsymbol{V(M) = \sum_i V_i}$$

En utilisant l'expression du potentiel créé par une charge unique, on obtient :

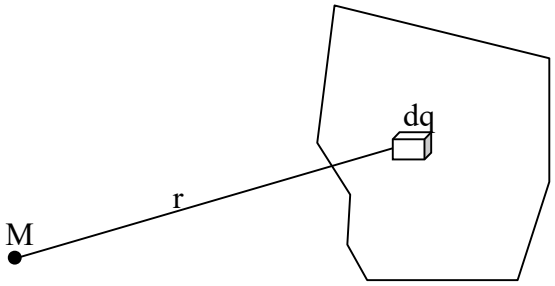
$$\boldsymbol{V(M) = k\sum_i \frac{q_i}{r_i}(V(\infty) = 0)\ \ et\ k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$$

Où r_i est la distance entre la charge q_i et le point M.

La fonction 'potentiel électrique' est une fonction scalaire et la somme $\sum_i \boldsymbol{V_i}$ est alors une somme algébrique dépendant des signes des charges q_i.

Lorsqu'on s'intéresse à une distribution continue de charges électriques D, on remplace la somme discrète par une intégrale :

$$\boldsymbol{V(M) = \sum_i V_i = \int_D dV}$$



Le potentiel électrostatique créé par la distribution de charges continue est alors :

$$\boldsymbol{V(M) = k\int_D \frac{dq}{r}}$$

Où r est la distance entre le point M et le point où se trouve la charge élémentaire dq de la distribution de charges.

Remarques :

1. Dans le cas d'une distribution de particules chargées q_i :

   $\boldsymbol{V(M) = k\int_D \frac{q_i}{r}(V(\infty) = 0)}$ avec $\boldsymbol{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$

2. Dans le cas d'une distribution linéaire de la charge électrique de densité linéique λ : $\boldsymbol{dq = \lambda dl}$, ainsi :

   $$\boldsymbol{V(M) = \int_{longueur} \frac{\lambda dl}{r} + V_0\ \ [V_0\ potentiel\ de\ référence]}$$

3. Dans le cas d'une distribution en surface de la charge électrique de densité superficielle σ : $\boldsymbol{dq = \sigma dS}$, ainsi :

$$V(M) = k \int_{surface} \frac{\sigma dS}{r} + V_0 \quad [V_0 \ \textbf{potentiel de référence}]$$

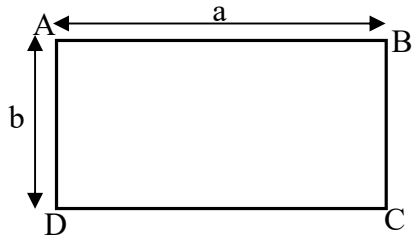
4. Dans le cas d'une distribution en volume de la charge de densité volumique ρ : $dq = \rho dV$, ainsi :

$$V(M) = k \int_{volume} \frac{\rho dV}{r} + V_0 \quad [V_0 \ \textbf{potentiel de référence}]$$

5. Noter que l'on ne peut pas évaluer le potentiel (ni le champ d'ailleurs) sur une particule chargée en utilisant l'expression correspondante (c'est-à-dire r = 0). Par contre, on peut le faire avec une distribution continue : c'est dû au fait que dq/r converge lorsque r tend vers zéro.

2.5 Application :

On considère les trois charges ponctuelles : -2q, 3q, 2q qui sont respectivement placées sur les sommets B, C et D d'un rectangle ABCD (a=0,4 m ; b=0,3 m) on donne q=4µC. Le potentiel créé par les trois charges en A est égal à la somme des potentiels créés par chaque charge en A.



$$V_A = \sum_{i=1}^{3} V_i = V_B + V_C + V_D$$

$$V_A = k\left[\frac{-2q}{a} + \frac{3q}{c} + \frac{2q}{b}\right] = kq\left[\frac{-2}{a} + \frac{3}{c} + \frac{2}{b}\right]$$

Avec $c = \sqrt{a^2 + b^2 = 0,5\ m}$

$$V_A = 9.10^9.410^{-6}\left[\frac{-2}{0,4} + \frac{3}{0,5} + \frac{2}{0,3}\right]$$

$$V_A = 2,76.10^5\ V$$

3 Surfaces équipotentielles

Une surface équipotentielle est un ensemble de points du champ ayant le même potentiel, c'est-à-dire une surface caractérisée par l'équation du potentiel :

Le potentiel V a une valeur constante, et par suite : dV=0.

Si la charge q se déplace sur une surface équipotentielle où le potentiel V est constant, alors la différence de potentiel dV est donc nulle.

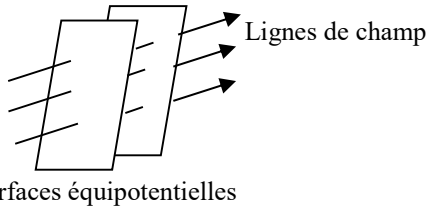
Mais $dV = -\vec{E}.d\vec{l}$, $d\vec{l}$ étant un déplacement infinitésimal sur la surface équipotentielle, donc un vecteur tangent à cette surface.

Vu que $dV = -\vec{E}.d\vec{l} = 0$, alors $\vec{E}$ reste perpendiculaire à $d\vec{l}$ quelque soit sa direction, ce qui fait que $\vec{E}$ est toujours normal à la surface équipotentielle.

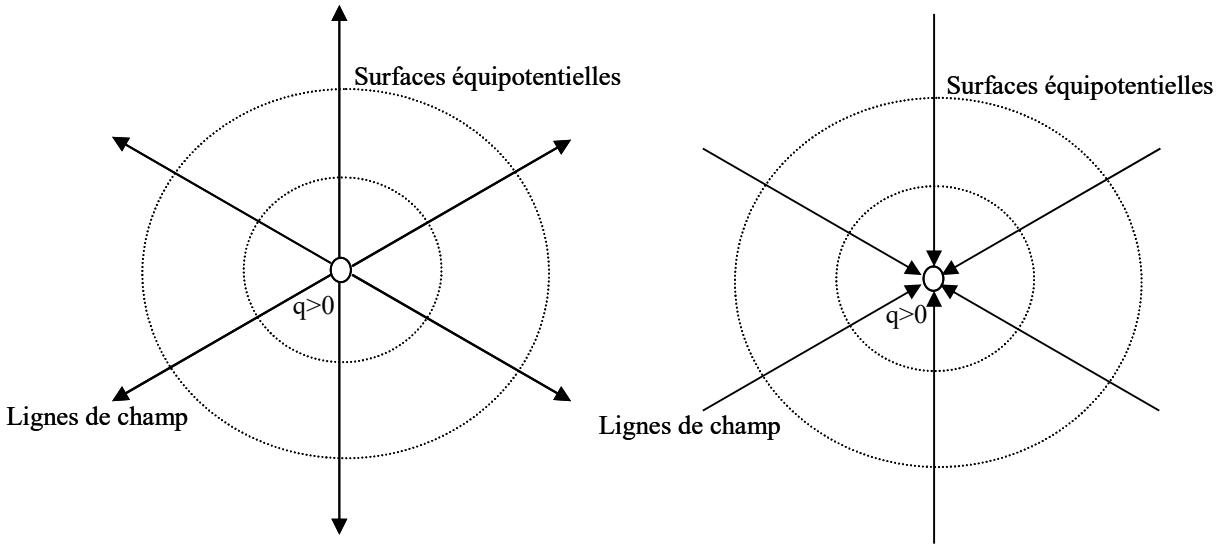
On peut conclure alors que les lignes de champ sont aussi normales aux surfaces équipotentielles.

Remarques :

1. Dans le cas d'un champ électrique uniforme, els lignes de champ sont des droites parallèles, ainsi les surfaces équipotentielles seront dans ce cas des plans parallèles entre eux et perpendiculaires aux lignes de champ.



2. Dans le cas d'un champ électrique créé par une charge ponctuelle, les lignes de champ sont des droites radiales qui passent par la charge, ainsi les surfaces équipotentielles seront des sphères concentriques centrées sur q.



4 Energie potentielle d'interaction d'un système de particules chargées

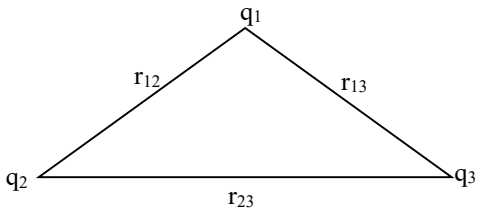
Le travail extérieur effectué pour déplacer la charge est : q_2V_1. Soit V_1 le potentiel électrique produit en un point P par la charge Q_1, alors le travail $\boldsymbol{W_{\infty P}(\vec{F}_e)}$ effectué par la force électrique pour déplacer une charge q_2 de l'infini (où le potentiel est nul) vers le point P est donc $\boldsymbol{q_2(V_\infty - V_1) = -q_2V_1}$.

Ce travail est égal à l'inverse de la variation de l'énergie potentielle $(\boldsymbol{-\Delta U = U_\infty - U_P})$ du système des deux particules chargées q_1 et q_2 séparées par une distance r_{12} :

$$\boldsymbol{U(P) = q_2V_1 = k\frac{q_1q_2}{r_{12}}\ en\ Joules}$$

Si le système est composé de plus de deux charges, l'énergie potentielle totale est obtenue en calculant U pour chaque paire de charges et en faisant la somme algébrique des termes ainsi calculés.

Considérons le système formé de trois charges ponctuelles q_1, q_2 et q_3 placées à des distances r_{12}, r_{13} et r_{23} les unes des autres.



L'énergie potentielle de formation de cette distribution de charges est :

$$\boldsymbol{U = k\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)}$$

U peut s'écrire aussi comme :

$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2} q_1 \left(k\frac{q_2}{r_{12}} + k\frac{q_3}{r_{13}}\right) + \frac{1}{2} q_2 \left(k\frac{q_1}{r_{12}} + k\frac{q_3}{r_{23}}\right) + \frac{1}{2} q_3 \left(k\frac{q_1}{r_{13}} + k\frac{q_2}{r_{23}}\right)}$$

C'est-à-dire :

$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2} q_1 V_1^0 + \frac{1}{2} q_2 V_2^0 + \frac{1}{2} q_3 V_3^0}$$

Où $\boldsymbol{V_1^0}$ est le potentiel créé par les deux charges q_2 et q_3 au point 1 sans compter la charge q_1, $\boldsymbol{V_2^0}$ et $\boldsymbol{V_3^0}$ auront la même définition.

Nous pouvons alors généraliser l'expression de l'énergie potentielle U de formation d'une distribution de n charges ponctuelles :

$$\boldsymbol{U = \sum_i \frac{1}{2} q_i V_i^0}$$

Dans le cas d'une distribution continue de charge de densité ρ, nous remplaçons :

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(\int \rho dv\right) V}$$

Si la charge Q est soumise à un potentiel V, alors son énergie est donnée par :

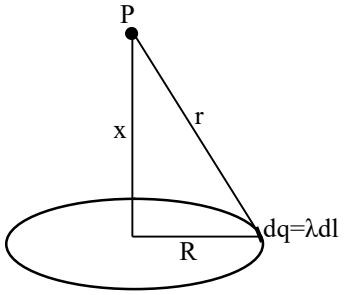
$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2} QV}$$

5 Application

Potentiel et champ électriques créés en un point P de l'axe d'un anneau de rayon R et de charge Q distribuée uniformément.

Soit P un point de l'axe d'un anneau à une distance x de son centre et soit dl un élément de longueur sur l'anneau et dq la charge de dl : dq=λdl avec : $\boldsymbol{\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi R}}$

dV est alors le potentiel associé à l'élément de charge dq :



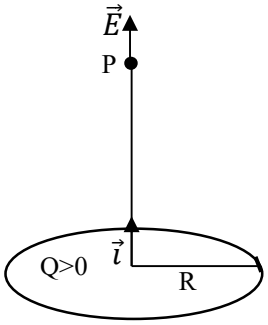
$\boldsymbol{dV = k\frac{dq}{r}}$ avec $\boldsymbol{r = \sqrt{R^2 + x^2}}$

Or r est constant, alors $\boldsymbol{V = \int dV = \int k\frac{dq}{r}}$; d'où :

$$\boldsymbol{V = \frac{k}{r}\int_{anneau} \lambda dl = \frac{k\lambda}{r}\int_{anneau} dl = \frac{k\lambda 2\pi R}{r}}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}}}$$

Le potentiel V dépend de la distance x seulement, alors V=V(x). Le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ sur l'axe de l'anneau est alors une fonction de x seulement :



$$\boldsymbol{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial v}{\partial x}\vec{\imath} \Longrightarrow E = E(x) = -\frac{dV}{dx}}$$

$$\boldsymbol{\vec{E} = -kQ\frac{d}{dx}\left[(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}\right] \Longrightarrow E = k\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

$$\boldsymbol{\vec{E} = k\frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{\imath}}$$

$\vec{\boldsymbol{E}}$ est un vecteur porté par l'axe et de même sens que $\vec{\boldsymbol{\imath}}$.

Point particulier :

Au centre de l'anneau, c'est-à-dire pour x=0 : $\boldsymbol{V = V_0 = k\frac{Q}{R}}$

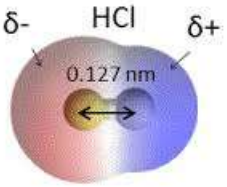
Et E=0, ce résultat est vérifié par la symétrie circulaire.

6 Le dipôle électrostatique

6.1 Définition du dipôle :

Il existe dans la nature des systèmes électriquement neutres mais dont le centre des charges négatives n'est pas confondu avec celui des charges positives. Un tel système peut souvent être approximativement modélisé par deux charges électriques ponctuelles, +q et –q situées à une distance a l'une de l'autre. On appelle un tel système de charges un dipôle électrostatique.

On appelle moment dipolaire électrique la grandeur :



$$\boldsymbol{\vec{P} = qd\vec{\imath}}$$

$$\boldsymbol{\vec{P} = 2aq\vec{\imath}}$$

Les molécules telles que HCL, CO, H_2O… constituent des exemples de dipôles électrostatiques. Pour connaitre l'effet électrostatique que les deux charges d'un dipôle créent autour d'elles nécessitent de calculer le champ électrostatique.

Pour obtenir ce champ, on peut, en appliquant le principe de superposition et en calculant ainsi la somme vectorielle des deux champs créés par ces deux charges. L'avantage de déterminer le potentiel électrique est de permettre d'arriver au même résultat sans complexité.

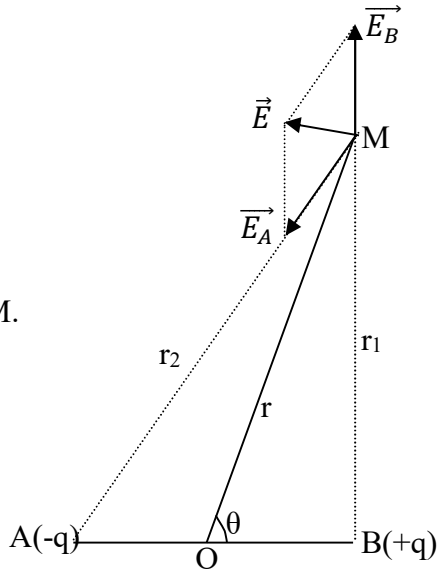
6.2 Calcul du potentiel et du champ créés par un dipôle :

Soit le dipôle électrique de la figure ci-dessous.

Il est formé de deux charges ponctuelles +q et –q, séparées par une distance d=2a, considérée comme petite devant la distance à un point M où on désire déterminer le potentiel électrique puis le champ électrique créés en ce point ; c'est-à-dire 2a << r = OM.

Le moment dipolaire ($\vec{P}$) du dipole est dirigé de la charge (-q) vers la charge (+q) :

$$\vec{P} = q\overrightarrow{AB} = 2q\vec{a}.$$



6.3 Le point M à l'extérieur de l'axe AB

a) Calcul du potentiel

Le potentiel créé au point M est d'après le principe de superposition égal à la somme des deux potentiels créés par chacune des deux charges :

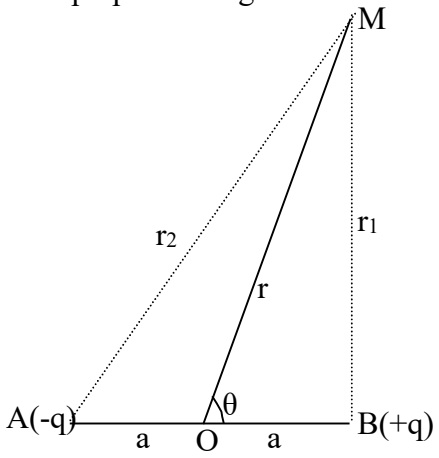
$$V(M) = V_A + V_B$$

$$V(M) = k\frac{(-q)}{r_2} + k\frac{(q)}{r_1}$$

Où l'on a choisi arbitrairement V=0 à l'infini.

$$V(M) = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$V(M) = kq\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$



Lorsqu'on ne s'intéresse qu'à l'action électrostatique à grande distance, c'est-à-dire à des distances r>>a, alors : $r_1 r_2 = r^2$ et $r_2 - r_1 = 2a\cos\theta$, on obtient :

$$V(M) = k\frac{2qa\cos\theta}{r^2}$$

Et par suite, le potentiel au point M a pour expression :

$$\boldsymbol{V(M) = k\frac{P\cos\theta}{r^2}}$$

b) Calcul du champ

Puisque le champ électrique $\vec{E}$ dérive du potentiel V ($\vec{E} = -\overrightarrow{grad V}$), et vu que V dépend de r et θ seulement, alors, l'expression en coordonnées cylindrique du gradient :

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad V}$

$\vec{E} = -\frac{\partial v}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$ Car $E_z = 0$.

Ainsi : $E_r = -\frac{\partial v}{\partial r} = k\frac{2P\cos\theta}{r^3}$ et $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = k\frac{P\sin\theta}{r^3}$

Le module du champ :

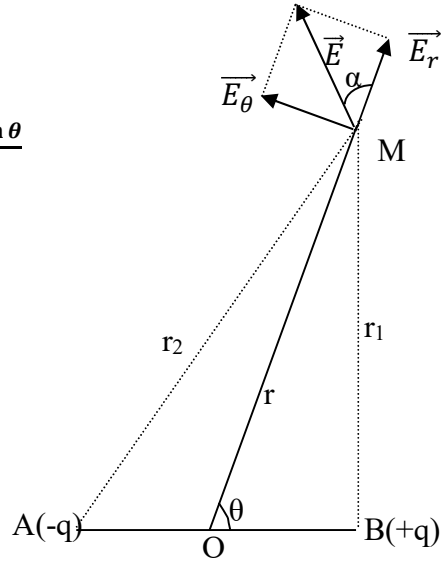
$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2}$

$E = k\frac{P}{r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

$E = k\frac{P}{r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$

$tg\alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{E_t}{E_r}$

$tg\alpha = \frac{1}{2}tg\theta$



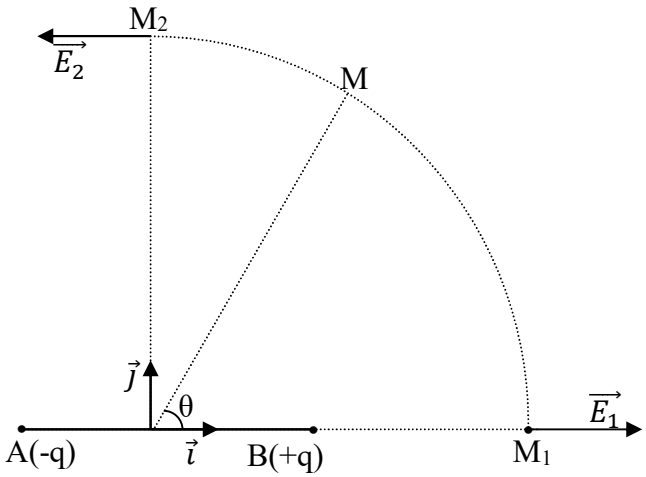
Deux positions particulières M_1 et M_2 appelées positions principales de Gauss :

1. M en M_1 ; où θ=0 : E_θ=0 donc :

   $\vec{E} = \vec{E_t} = \vec{E_r} = k\frac{2P}{r^3}\vec{\imath}$

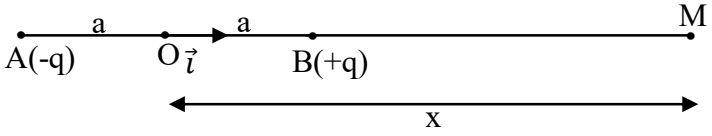
2. M en M_2 ; où $\theta = \frac{\pi}{2}$, $E_r = 0$ donc :

   $\vec{E} = \vec{E_\theta} = k\frac{P}{r^3}\vec{\jmath} = \frac{E_1}{2}\vec{\jmath}$



6.4 Le point M se trouve sur l'axe AB

Le potentiel créé par les deux charges du dipôle est donné, d'après le principe de superposition par :



$$V(M) = V_A + V_B$$

$$V(M) = k\frac{(-q)}{x+a} + k\frac{(+q)}{x-a}$$

$$V(M) = kq\left[\frac{-x+a+x+a}{x^2-a^2}\right]$$

$$x \gg a \Rightarrow V(M) \approx k\frac{2qa}{x^2} = k\frac{p}{x^2}$$

Puisque le champ électrique $\vec{E}$ dérive du potentiel V ($\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$), et Vu que V dépend de x seulement, alors, l'expression du gradient devient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial v}{\partial x}\vec{\imath}$$

Ainsi : $E = -\frac{dV}{dx} = \frac{2kP}{x^3}$ et $\vec{E} = \frac{2kP}{x^3}\vec{\imath}$

7 Action d'un champ électrique uniforme sur un dipôle

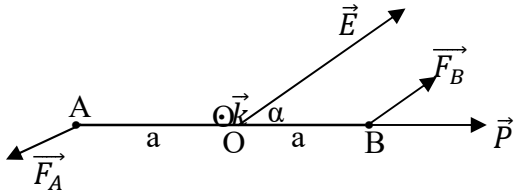
Considérons un dipôle AB de charges respectives A(-q) et B(-q) placé dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$. Sur les charges du dipôle s'exercent deux forces $\vec{F_A}$ et $\vec{F_B}$ de sens opposés et de même module F=qE, qui forment un couple de moment $\vec{C}$ tel que :

$\vec{C} = 2\vec{a} \wedge \vec{F}$

$\vec{C} = 2aFsin\alpha\vec{k} = PEsin\alpha\vec{k}$

$C = PEsin\alpha$

Vectoriellement $\vec{C} = \vec{P} \wedge \vec{E}$



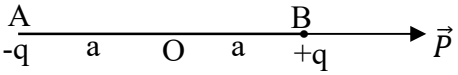
Alors, le dipôle, sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$ tourne et atteint sa position d'équilibre lorsque C=0, c'est-à-dire lorsque le vecteur moment dipolaire $\vec{P}$ et le champ $\vec{E}$ sont colinéaires.

Cette position d'équilibre est stable si $\vec{P}$ et $\vec{E}$ ont même sens ; et elle est instable si $\vec{P}$ et $\vec{E}$ ont deux sens opposés.

8 Energie potentielle d'un dipôle dans un champ électrique

8.1 Energie de formation d'un dipôle

Considérons un dipôle AB de charges respectives A(-q) et B(+q) placées à une distance 2a l'une de l'autre.



L'énergie de formation de ce dipôle est :

$$\boldsymbol{W_{dipole} = q_A V_A + q_B V_B}$$

Où V_A le potentiel créé par la charge q_B en A et V_B le potentiel créé par la charge q_A en B.

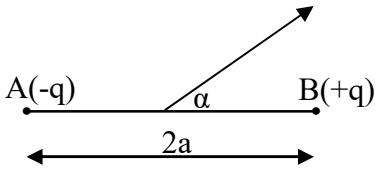
$\boldsymbol{V_A = k\frac{+q}{2a}}$ et $\boldsymbol{V_B = k\frac{-q}{2a}}$ avec $V\infty = 0$.

$$\boldsymbol{W_{dipole} = -q_A V_A + q_B V_B = -2k\frac{q^2}{2a}}$$

$$\boldsymbol{W_{dipole} = -q_A V_A + q_B V_B = -kq\frac{p}{2a^2}}$$

8.2 Energie d'un dipôle due à la présence dans un champ électrique uniforme

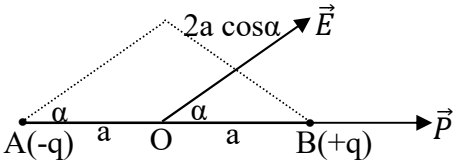
Considérons que le dipôle AB est placé dans un champ électrique uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$, tel que $\vec{\boldsymbol{E}}$ fait un angle α avec le moment dipolaire $\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{q\overrightarrow{AB}}$. Soient V_{EA} et V_{EB} les potentiels électriques créés par ce champ respectivement en A et B.



L'énergie potentielle due au placement de ce dipôle dans le champ électrique uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$ est donnée par : $\boldsymbol{W_E = (-q)V_A + q_B V_B = q(V_B - V_A)}$

Cette énergie qui n'apparait sous aucune forme est emmagasinée par le dipôle sous forme d'énergie potentielle électrostatique (U).

Vu que le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$ est uniforme, alors :



$$\boldsymbol{E = \frac{V_B - V_A}{2a\,cos\alpha} \Longrightarrow V_{B-}V_A = 2a\,E\,cos\alpha}$$

D'où $\boldsymbol{W_E = q\,2a\,cos\alpha = PE\,cos\alpha = \vec{P}.\vec{E}}$

Ce travail se trouve emmagasiné sous forme d'énergie potentielle : $\boldsymbol{U = W = \vec{P}.\vec{E}}$

Pour un déplacement angulaire du dipôle d'un angle $\alpha_{initial}$ à un angle α_{final} que fait le champ électrique avec le dipôle , le travail W effectué par les forces électriques due au champ électrique, est donnée par : $\boldsymbol{W - \Delta U = PE\left[cos\alpha_{initial} - cos\alpha_{final}\right]}$